E.N.S.I. CHIMIE NORD 1982

Programme P **ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES** (4 h)

N.B. : Les parties A et B sont entièrement indépendantes.

On désigne par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. On appelle E^* le complémentaire de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ et $E = E^* \cup \{0\}$.

Dans le problème, m est un entier positif impair et $p = \dfrac{m-1}{2}$.

A

Dans cette partie, x appartient à E^*.

1° Résoudre l'équation d'inconnue complexe Z :

$(Z - i)^m(i + \operatorname{cotg} \pi x) + (Z + i)^m(i - \operatorname{cotg} \pi x) = 0$. $\left(\text{On pourra poser } y = \dfrac{Z-i}{Z+i}\right)$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

En déduire la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{k=-p}^{p} \operatorname{cotg} \pi \left(\frac{x+k}{m}\right)$.

2° On pose $F(x) = \pi \operatorname{cotg} \pi x$ (cette fonction est évidemment continue sur E^*).

Vérifier que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{x+k}{m} \in E^*$ et, en se servant de la question 1°, montrer que :

$$\sum_{k=-p}^{p} F\left(\frac{x+k}{m}\right) - m\, F(x)$$

a une valeur indépendante de x, que l'on déterminera.

3° Montrer que $F(x) - \dfrac{1}{x}$ admet une limite L quand x tend vers 0.

Que vaut L?

B

On désigne par N un entier supérieur ou égal à 1.

1° Pour $x \in E$ on pose $a_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{x}{x^2 - n^2}$.

Montrer que pour tout x la suite $a_N(x)$ admet une limite quand N tend vers $+\infty$. On note A (x) cette limite, et A désigne la fonction qui à $x \in E$ associe le nombre A (x).

2° On se propose de montrer que la restriction de la fonction A à l'intervalle $J = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ est continue.

a. Trouver une expression $\omega(n)$ indépendante de x et de y telle que

$$\forall x \in J,\ \forall y \in J,\ x \neq y,\ \left|\frac{1}{x-y}\right| \cdot \left|\frac{x}{x^2-n^2} - \frac{y}{y^2-n^2}\right| \leqslant \omega(n).$$

b. Montrer que l'on peut majorer $\left|\dfrac{1}{x-y}\right| \cdot \left|a_N(x) - a_N(y)\right|$ par une expression indépendante de N, x, y, pour $x \in J$ et $y \in J$, $x \neq y$. En déduire la continuité de la restriction de A à l'intervalle J.

3° Pour $x \in E^*$ on pose $b_N(x) = a_N(x) + \dfrac{1}{2x}$ et $B(x) = A(x) + \dfrac{1}{2x}$.

.../...

a. Calculer $b_N(x+1) - b_N(x)$, puis $B(x+1) - B(x)$. (On pourra remarquer que

$$\frac{x}{x^2 - n^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\right]\Big).$$

b. Montrer que les $m(2N+1)$ nombres entiers $k + mn$ $(-p \leqslant k \leqslant p,\ -N \leqslant n \leqslant N)$ sont tous distincts. Les comparer avec les entiers contenus dans l'intervalle $[-(mN+p),\ mN+p]$.

c. Que vaut la fonction $\sum_{k=-p}^{p} b_N\left(\frac{x+k}{m}\right) - m \cdot b_{mN+p}(x)$?

En déduire $\sum_{k=-p}^{p} B\left(\frac{x+k}{m}\right) - m\,B(x) = 0.$

C

Pour tout x dans E, on définit les fonctions H et K : $H(0) = L$

$$\forall x \in E^* \qquad H(x) = F(x) - \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in E \qquad K(x) = 2A(x) - H(x).$$

1° Montrer que la restriction de K à l'intervalle J est continue.

Que vaut $\sum_{k=-p}^{p} K\left(\frac{x+k}{m}\right) - m\,K(x)$ pour $x \in E$?

2° On désire montrer que K est nulle sur J. On suppose $m \geqslant 3$.

a. Montrer qu'il existe $x_0 \in J$ tel que $\forall x \in J,\ |K(x)| \leqslant |K(x_0)|$.

b. Montrer que $\forall k \in [-p, +p],\ \left|K\left(\frac{x_0+k}{m}\right)\right| = |K(x_0)|$.

c. On pose $x_n = \frac{x_0}{m^n}$. Que vaut $|K(x_n)|$? En déduire que le maximum de $|K|$ sur J est atteint pour $x = 0$. Conclure.

3° *a.* Calculer $K(x+1) - K(x)$ pour $x \in E^*$

b. Démontrer que pour tout x dans E^* on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \pi \operatorname{cotg} \pi x - \frac{1}{x}$$

4° Justifier la convergence des séries suivantes et indiquer leurs sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 1}.$$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail